

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРА FE-ЗАМЫКАНИЯ В СЧЕТНОЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ

Аннотация.

Актуальность и цели. Функциональные уравнения – это один из наиболее распространенных способов задания функций в различных областях математики. Рассматриваются системы функциональных уравнений на множестве функций счетнозначной логики и оператор замыкания, базирующийся на существовании решения данных систем – оператор FE-замыкания. Исследуются некоторые свойства и выразительная способность оператора FE-замыкания с логическими связками и без них.

Материалы и методы. Рассматриваемый в работе оператор FE-замыкания исследуется аналогично операторам замыкания, известным ранее. Основные понятия, такие как замыкания множества, замкнутого и предполного класса, определяются аналогично другим операторам замыкания. В доказательствах используются известные факты о булевых функциях, о перестановках на множестве натуральных чисел, о классе однородных функций и о принципе сопряженности для оператора замыкания.

Результаты. Доказано, что FE-замыкание пустого множества с логической связкой дизъюнкцией совпадает с FE-замыканием тернарного дискриминатора p . Установлено, что FE-замыкание тернарного дискриминатора p и конечного набора констант совпадает с множеством всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками, совпадающими с данными константами. Показано, что мощность семейства FE-предполных классов не менее чем континуальна.

Выводы. На основе рассмотренных свойств оператора FE-замыкания с логическими связками и без них можно сделать оценку его выразительных способностей. Рассматриваемый оператор замыкания является сильным оператором замыкания (в сравнении, например, с оператором суперпозиции), тем не менее порождает достаточно много замкнутых и предполных классов.

Ключевые слова: функции счетнозначной логики, оператор FE-замыкания.

I. S. Kalinina

ON SOME PROPERTIES OF FE-CLOSURE OPERATOR IN COUNTABLY VALUED LOGIC

Abstract.

Background. Functional equations are one of the most widely-used ways to define functions in various areas of mathematics. The article considers the systems of functional equations on multiple functions of countably valued logic and the closure operator, based on existence of a solution for the given systems – FE-closure operator. The work investigates some properties and expressiveness of the FE-closure operator with and without logical connectives.

Materials and methods. The FE-closure operator, considered in the paper, is researched similarly to the previously-known closure operators. Such main notions as closure of set, closed and precomplete class are determined similarly to other closure operators. In proving the author used well-known facts about Boolean functions,

permutations in multiple natural numbers, homogeneous function class and conjugation principle for the closure operator.

Results. It is proved that the FE-closure of an empty set with logical connective disjunction coincides with the FE-closure of a ternary discriminator p . It is established that FE-closure of a ternary discriminator p and final constant pool coincides with the set of all functions, self-conjugated relative to any permutations with fixed points coinciding with the given constants. It is shown that the strength of the FE-precomplete class assemblage is at most continuous.

Conclusions. On the basis of the considered properties of the FE-closure operator with and without logical connectives it is possible to estimate its expressiveness. The considered closure operator is a strong closure operator (in comparison, for example, with superposition operators), and nevertheless it causes quite a lot of closed and precomplete classes.

Key words: functions of countably valued logic, FE-closure operator.

Функциональные уравнения широко применяются практически во всех разделах математики. Это один из наиболее распространенных способов задания функций в совершенно разных областях. Достаточно, например, сказать, что одна из первых формализаций понятия рекурсивной функции – формализация Эрбрана – Геделя [1–3] – базируется именно на функциональных уравнениях. Функциональные уравнения определяются на основе функциональных и предметных переменных, а также различных функциональных и предметных констант, а их отличительной особенностью является то, что в качестве решений данных уравнений рассматриваются функции и наборы функций.

Системы функциональных уравнений являются удобным средством для задания операторов замыкания. Одним из наиболее естественных является замыкание, основанное на существовании решения у системы функциональных уравнений, – FE-замыкание. В работах [4, 5] исследуется оператор FE-замыкания на множестве функций многозначной логики, а в работах [6, 7] – на множестве функций счетнозначной логики. В настоящей статье мы хотим рассмотреть некоторые свойства оператора FE-замыкания также на множестве P_N функций счетнозначной логики.

В теореме 1 мы устанавливаем верность равенства $FE_{\&\vee}[\emptyset] = FE[p]$, а в теореме 2, что класс $FE_{\&\vee}[\max]$ совпадает с классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини [8]. В теореме 3 доказываем, что FE-замыкание множества $\{p(x, y, z), a_1, \dots, a_k\}$, где $a_1, \dots, a_k$ – константы, совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками $a_1, \dots, a_k$. В теореме 4 показываем, что мощность семейства FE-предполных классов не менее чем континуальна.

Введем необходимые понятия. Пусть $N = \{0, 1, \dots\}$, P_N – множество всех функций на N (множество функций счетнозначной логики). Если $Q \subseteq P_N$ и $n \geq 1$, то через $Q^{(n)}$ обозначаем множество всех функций из Q , зависящих от n переменных. Для любых $n \geq 1$ и i , $1 \leq i \leq n$, рассматриваем селекторную функцию $e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, значения которой совпадают со значениями переменной x_i . На множестве P_N предполагаем заданной операцию суперпозиции [9].

В определении языка функциональных уравнений придерживаемся терминологии работ [3–7]. Предполагаем, что каждая функция из P_N имеет индивидуальное обозначение. Для обозначения n -местных функций из P_N используем символы $f_i^{(n)}$, которые называем функциональными константами. Наряду с функциональными константами рассматриваем функциональные переменные $\phi_i^{(n)}$ со значениями в области $P_N^{(n)}$. Кроме функциональных переменных, используем обычные предметные переменные $x_1, x_2, \dots$ с областью значений N .

Пусть $Q \subseteq P_N$. Определим понятие термина над Q . Всякая предметная переменная есть терм над Q . Если $t_1, \dots, t_n$ – термы над Q , $f_i^{(n)}$ – функциональная константа, служащая обозначением функции из Q , $\phi_j^{(n)}$ – функциональная переменная, то выражения $f_i^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$, $\phi_j^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$ суть термы над Q .

Равенством над Q называем любое выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 – термы над Q . Равенства над Q считаем также функциональными уравнениями над Q . Пусть $\phi_{i_1}^{(n_1)}, \dots, \phi_{i_m}^{(n_m)}$ – все функциональные переменные, входящие в уравнение $t_1 = t_2$. Решением уравнения $t_1 = t_2$ называем систему $\{f_{j_1}^{(n_1)}, \dots, f_{j_m}^{(n_m)}\}$ функций из P_N , которая после замены каждой переменной $\phi_{i_s}^{(n_s)}$ соответствующей функциональной константой $f_{j_s}^{(n_s)}$ превращает уравнение $t_1 = t_2$ в тождество (относительно всех входящих в уравнение предметных переменных). Если Ξ – конечная система уравнений, то решением системы уравнений Ξ называем систему функций из P_N , которая является решением каждого уравнения, входящего в систему Ξ .

Для того чтобы с помощью решений системы уравнений определять некоторые множества функций (от одного и того же числа переменных), выделим одну из функциональных переменных системы Ξ , которую назовем главной функциональной переменной системы Ξ . Пусть $\phi_i^{(n)}$ – главная функциональная переменная системы уравнений Ξ и $Q \subseteq P_N^{(n)}$. Говорим, что множество функций Q определяется системой уравнений Ξ , если Q является множеством всех тех n -местных функций, которые входят в решения системы Ξ в качестве компоненты по переменной $\phi_i^{(n)}$.

Пусть $Q \subseteq P_N$. Замыканием множества Q относительно систем функциональных уравнений (коротко: FE-замыканием) называем множество всех функций из P_N , которые определяются как одноэлементные множества системами функциональных уравнений над Q . FE-замыкание множества Q обозначаем через $FE[Q]$. Множество Q называем FE-замкнутым, если $Q = FE[Q]$.

Нетрудно убедиться в том, что FE-замыкание удовлетворяет известным аксиомам замыкания, т.е. действительно является оператором замыкания на множестве P_N . Кроме того, для любого множества Q (в том числе при $Q = \emptyset$) множеству $FE[Q]$ принадлежат все селекторные функции и множество $FE[Q]$ замкнуто относительно операции суперпозиции.

1. FE-замыкание с логическими связками

Расширим логические возможности языка FE: будем вносить в язык FE некоторое множество M логических связок. Полученный в результате язык обозначим через FE_M . Формулы языка FE_M образуем из элементарных формул (равенств термов) с помощью всех логических операций из множества M . Для языка FE_M по аналогии с языком FE-замыкания вводятся понятия FE_M -определимости множества функций и FE_M -замыкания (см., например, [10]. Язык $FE_{\&\vee\rightarrow}$ с полной системой логических связок обозначим через FEC.

Тернарным дискриминатором назовем следующую функцию (см. [11]):

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{если } x = y, \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 1. Имеет место равенство $FE_{\&\vee}[\emptyset] = FE[p]$.

Доказательство. В работе [10] доказано, что $FE[p]$ совпадает с $FEC[\emptyset]$, а значит, $FE_{\&\vee}[\emptyset] \subseteq FE[p]$. Для доказательства обратного включения выразим дискриминатор p следующей формулой языка $FE_{\&\vee}$:

$$(\varphi(x, x, y) = y) \& ((x = y) \vee \varphi(x, y, z) = x).$$

Теорема доказана.

Следствие. Имеют место равенства $FE_{\rightarrow}[\emptyset] = FE[p]$ и $FE_{\sim}[\emptyset] = FE[p]$.

Первое равенство следует из того, что булева функция $x \rightarrow y$ порождает (в смысле операции суперпозиции) булеву функцию $x \vee y$, второе – из того, что функции $x \& y$ и $x \sim y$ также порождают функцию $x \vee y$.

Рассмотрим начальный класс Σ_1^1 аналитической иерархии Клини [8]. Этот класс можно определить как класс всех отношений, представимых в форме

$$(\exists f_{m+1}) \dots (\exists f_{m+l})(\forall x_1) \dots (\forall x_k) R(f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_{m+l}, x_1, \dots, x_k),$$

где $f_1 \in P_N^{(n_1)}, \dots, f_m \in P_N^{(n_m)}, f_{m+1} \in P_N^{(n_{m+1})}, \dots, f_{m+l} \in P_N^{(n_{m+l})}$ и R – рекурсивное отношение на множестве $P_N^{(n_1)} \times \dots \times P_N^{(n_m)} \times P_N^{(n_{m+1})} \times \dots \times P_N^{(n_{m+l})} \times N^k$.

Теорема 2. Класс $FE_{\&\vee}[\max]$ совпадает с классом Σ_1^1 аналитической иерархии Клини.

Доказательство. Согласно теореме 1 имеет место равенство $FE_{\&\vee}[\max] = FE[\max, p]$. А так как функции $\max$ и p рекурсивны, то согласно теореме 2 из работы [6] класс $FE[\max, p]$ целиком содержится в классе Σ_1^1 .

Обратно, константа 0 получается в качестве решения системы уравнений

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(y), \quad \max(\varphi_0(x), x) = x.$$

Далее, поскольку $FE[p] = FEC[\emptyset]$, то $x + 1$ получаем как единственную функцию, удовлетворяющую следующей формуле:

$$\begin{aligned} (\max(x, \varphi(x)) = \varphi(x)) \& (x \neq \varphi(x)) \& ((\max(x, y) = y) \& (x \neq y)) \rightarrow \\ \rightarrow (\max(y, \varphi(x)) = y). \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем обе функции 0 и $x + 1$. Далее применяем теорему 2 из работы [6]. Теорема доказана.

Следствие. Класс $FE_{\&\vee}[\min]$ совпадает с классом Σ_1^1 .

Доказательство. Рекурсивность функций $\min$ и p гарантирует включение класса $FE_{\&\vee}[\min]$ в класс Σ_1^1 . Обратно, функция $\max$ выражается формулой через функцию $\min$:

$$(\varphi(x, y) = x \vee \varphi(x, y) = y) \& ((\varphi(x, y) = x) \sim (\min(x, y) = y))$$

(здесь эквивалентность $\sim$ выражается через связки $\&$ и $\vee$ согласно теореме 1 и результатам из работы [6]).

Следствие доказано.

2. FE-замыкание множества $\{p(x, y, z), a_1, \dots, a_k\}$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_N$ и π – перестановка на множестве N . Функция $f^\pi(x_1, \dots, x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n)))$ называется сопряженной с функцией f с помощью перестановки π . Если $f = f^\pi$, то функция f носит название самосопряженной с помощью перестановки π . Множество всех функций из P_N , самосопряженных с помощью перестановки π , обозначим через S_π . Легко убедиться в том, что множество S_π образует замкнутый (относительно операции суперпозиции) класс. Положим $H = \bigcap_{\pi} S_\pi$, где пересечение рассматривается по всем перестановкам π на множестве N . Функции из множества H носят название однородных функций [11]. Из определения следует, что множество H образует замкнутый класс. Легко видеть, что классу H принадлежат все селекторные функции. В работе [6] доказано следующее утверждение:

Утверждение 1 (принцип сопряженности для FE-замыкания). Пусть система Ξ функциональных уравнений над множеством функций $\{f_1, \dots, f_s\}$ определяет функцию f и π – перестановка на множестве N . Тогда система

уравнений Ξ^π , полученная из системы Ξ заменой каждой функциональной константы $f_i, 1 \leq i \leq s$, соответствующей функциональной константой f_i^π , определяет функцию f^π .

Обозначим через Γ_M группу всех перестановок на N с неподвижными точками из M , а через E_M обозначим класс всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок из группы Γ_M .

Теорема 3. FE-замыкание множества $\{p(x, y, z), a_1, \dots, a_k\}$, где $a_1, \dots, a_k$ – константы, совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками $a_1, \dots, a_k$.

Доказательство. Рассмотрим $E_{a_1, \dots, a_k}$ – класс всех функций, отвечающих группе $\Gamma_{a_1, \dots, a_k}$. Согласно принципу сопряженности класс $E_{a_1, \dots, a_k}$ FE-замкнут, а FE-замыкание системы с функциональными константами $p(x, y, z), a_1, \dots, a_k$ содержится внутри $E_{a_1, \dots, a_k}$ (поскольку функции $p(x, y, z), a_1, \dots, a_k$ являются самосопряженными относительно всех перестановок группы $\Gamma_{a_1, \dots, a_k}$).

Докажем обратное включение. Выберем из класса $E_{a_1, \dots, a_k}$ произвольную функцию $g(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – набор из множества N^n . Если $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{a_1, \dots, a_k\}$, то в силу включения $g \in E_{a_1, \dots, a_k}$ для любой перестановки π из $\Gamma_{a_1, \dots, a_k}$ должно выполняться равенство $g(\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n)) = g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Если же $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \notin \{a_1, \dots, a_k\}$, то для некоторого i должно быть $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_i$. При этом, конечно, $g(\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_n)) = \pi(\alpha_i)$, если только $\pi \in \Gamma_{a_1, \dots, a_k}$.

С использованием полной системы логических связок и констант $a_1, \dots, a_k$ можно построить логические формулы, которые однозначным образом распознают тип набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: определяют, есть ли в наборе элементы $a_1, \dots, a_k$ и в каких позициях они расположены, какие элементы набора равны между собой и какие нет.

Пусть $\Phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \Phi_l(x_1, \dots, x_n)$ – все такие логические формулы. К примеру, если переменные x_1, x_2 принимают равные значения, отличные от значений $a_1, \dots, a_k$, переменные $x_2, \dots, x_{n-2}$ – попарно различные значения, также отличные от значений $a_1, \dots, a_k$, а переменные x_{n-1}, x_n – соответственно значения a_1, a_2 , то некоторая формула Φ_i будет истинной на наборах данного типа и ложной на наборах всех остальных типов.

Как отмечено выше, на всех наборах одного и того же типа функция $g(x_1, \dots, x_n)$ либо совпадает с некоторой из констант $a_1, \dots, a_k$, либо с некоторой переменной из числа $x_1, \dots, x_n$. Для формулы Φ_i (и задаваемого ею типа

наборов) обозначим через $h_i(x_1, \dots, x_n)$ соответствующую ей функцию (часть переменных здесь может быть фиктивной). Тогда функцию g можно определить следующей формулой языка FEC:

$$(\forall x_1) \dots (\forall x_n) (\Phi_1(x_1, \dots, x_n) \& (\varphi(x_1, \dots, x_n) = h_1(x_1, \dots, x_n)) \vee \dots \\ \dots \vee \Phi_l(x_1, \dots, x_n) \& (\varphi(x_1, \dots, x_n) = h_l(x_1, \dots, x_n))).$$

Поскольку каждая из функций $h_i(x_1, \dots, x_n)$ либо является одной из констант $a_1, \dots, a_k$, либо равна одной из переменных $x_1, \dots, x_n$, получаем, что функция g принадлежит FE-замыканию множества $\{p, a_1, \dots, a_k\}$. Теорема доказана.

Характеристической функцией отношения $\rho(x_1, \dots, x_n)$ назовем функцию $\chi(x_1, \dots, x_n)$, которая принимает лишь значения 0 и 1, причем значение 1 – только на наборах, удовлетворяющих отношению ρ . Характеристическую функцию отношения $x_1 = x_2$ обозначим через $\chi_=_$.

Следствие. FE-замыкание множества $\{\chi_=_\}$ совпадает с классом всех функций, самосопряженных относительно любых перестановок с неподвижными точками 0, 1.

Доказательство. Пусть класс E – класс всех функций для группы $\Gamma_{0,1}$. Согласно принципу сопряженности класс E FE-замкнут, а FE-замыкание системы с функциональной константой $\chi_=_$ содержится внутри E (поскольку функция $\chi_=_$ является самосопряженной относительно всех перестановок группы $\Gamma_{0,1}$).

Докажем обратное включение. Сначала с помощью функции $\chi_=_$ получим константы 0, 1 (в нижеследующей системе уравнений они отвечают функциональным переменным φ_0, φ_1):

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(y), \quad \varphi_1(x) = \chi_=(x, x), \quad \varphi(x, x, y) = x, \\ \varphi(\varphi_0(x), \varphi_1(x), y) = y, \quad \varphi_0(x) = \chi_=(\varphi_0(x), \varphi_1(x)).$$

Согласно теореме 3 из работы [7] FE-замыкание системы $\{\chi_=_ , 0, 1\}$ содержит все однородные функции, а значит, и функцию $p(x, y, z)$. Следствие доказано.

3. FE-предполные классы

Исследуем FE-предполные классы. Определение FE-предполного класса вводится вполне аналогично понятию предполного класса относительно оператора суперпозиции (см. [6]).

Разобьем множество N на счетное число попарно не пересекающихся неупорядоченных пар (i_1, i_2) . Пусть π – перестановка на N , которая переставляет местами элементы i_1 и i_2 каждой пары. Обозначим через Π множество всех таких перестановок π . Множество Π , очевидно, континуально.

Обозначим через S_π класс всех функций, самосопряженных относительно перестановки π из Π .

Лемма 1. Для любой перестановки $\pi \in \Pi$ класс S_π FE-предполон в P_N .

Доказательство. По принципу сопряженности для FE-замыкания класс S_π является FE-замкнутым. Очевидно также, что он отличен от класса P_N . Докажем теперь, что класс S_π FE-предполон в P_N .

Возьмем произвольную функцию $f(x_1, \dots, x_n) \in P_N \setminus S_\pi$. Тогда существует такой набор $(a_1, \dots, a_n)$, что $f(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)) \neq \pi(f(a_1, \dots, a_n))$.

Обозначим через Q FE-замыкание системы $\{f(x_1, \dots, x_n) \cup S_\pi\}$ и исследуем этот класс.

Построим функцию $g(x)$ следующим образом: если $n=1$, то пусть $g(x) = f(x)$, а если это не так, то выберем в классе S_π такие функции $g_2(x), \dots, g_n(x)$, чтобы при любом j ($2 \leq j \leq n$) выполнялись равенства

$$g_j(a_1) = a_j, \quad g_j(\pi(a_1)) = \pi(a_j).$$

Тогда $g(x) = f(x, g_2(x), \dots, g_n(x))$. Из определения следует, что функция $g(x)$ принадлежит классу Q , но не входит в класс S_π .

Для функции g возможны два случая: либо $g(a_1) = g(\pi(a_1))$, либо найдутся такие неравные пары $(k_1, k_2), (l_1, l_2)$, что $g(a_1) \in \{k_1, k_2\}$, $g(\pi(a_1)) \in \{l_1, l_2\}$, т.е. значения $g(a_1)$ и $g(\pi(a_1))$ попадают в разные пары выбранного разбиения.

Построим функцию $q(x)$ следующим образом: если выполнен первый случай, то пусть $q(x) = g(x)$, иначе выберем в классе S_π такую функцию $h(x)$, чтобы, например, выполнялись равенства $h(g(a_1)) = h(g(\pi(a_1))) = 0$.

Тогда функция $q(x) = h(g(x))$ будет удовлетворять первому случаю и также принадлежать классу Q .

Используя функцию $q(x)$, образуем в классе Q константу $b = f(a_1)$. Для этого выберем в классе S_π такую функцию $d(x)$, чтобы каждая пара вида (i_1, i_2) отображалась функцией d в пару $(a_1, \pi(a_1))$. Тогда $q(d(x))$ есть искомая константа b .

Если теперь $r(x_1, \dots, x_m)$ – произвольная функция из класса P_N , то в классе S_π имеется такая функция $r'(y, x_1, \dots, x_m)$, что справедливо тождество $r'(b, x_1, \dots, x_m) = r(x_1, \dots, x_m)$.

Значит, $r(x_1, \dots, x_m) \in Q$, и поэтому класс Q совпадает с классом P_N . Иными словами, класс S_π является FE-предполным в P_N . Лемма доказана.

В работе [4] исследуется мощность FE-замкнутых классов. Следующая теорема дает нижнюю оценку для числа FE-предполных классов.

Теорема 4. Мощность семейства FE-предполных классов не менее чем континуальна.

Доказательство. Поскольку класс Π состоит из континуального числа перестановок, для доказательства теоремы достаточно установить, что для любых двух различных перестановок π_1 и π_2 из класса Π соответствующие им классы функций S_{π_1} и S_{π_2} различны.

Пусть пара (l_1, l_2) из разбиения перестановки π_1 не является парой разбиения перестановки π_2 . Тогда найдутся такие различные числа m_1, m_2 , что разбиению перестановки π_2 принадлежат различные пары (l_1, m_1) и (l_2, m_2) . Возьмем в классе S_{π_1} функцию $f(x)$, которая переставляет элементы l_1, l_2 и тождественна на множестве $N \setminus \{l_1, l_2\}$. Покажем, что функция f не принадлежит классу S_{π_2} .

Предположим, что это не так. Тогда из определения функции f и само-сопряженности ее относительно перестановки π_2 вытекают соотношения $f(\pi_2(l_1)) = \pi_2(l_2)$, $f(m_1) = m_2$.

Последнее равенство невозможно, поскольку числа m_1, m_2 не принадлежат множеству $\{l_1, l_2\}$. Теорема доказана.

Список литературы

1. **Herbrand, J.** Sur le probleme fondamental de la logique mathematique / J. Herbrand // Compt. rend. Soc. Sci. Lettr. Vars. Classe III. – 1931. – Vol. 24. – P. 12–56.
2. **Herbrand, J.** Sur la non-contradiction de l'arithmetique / J. Herbrand // J. reine und angew. Math. – 1931. – Vol. 166. – S. 1–6.
3. **Godel, K.** Uber formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I / K. Godel // Monatsh. Math. und Phys. – 1931. – Vol. 38. – S. 173–198.
4. **Марченков, С. С.** Оператор замыкания в многозначной логике, базирующийся на функциональных уравнениях / С. С. Марченков // Дискретный анализ и исследование операций. – 2010. – № 4. – С. 18–31.
5. **Марченков, С. С.** FE-классификация функций многозначной логики / С. С. Марченков // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет. – 2011. – № 2. – С. 32–39.
6. **Марченков, С. С.** Оператор FE-замыкания в счетнозначной логике / С. С. Марченков, И. С. Калинина // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислит. матем. и кибернет. – 2013. – № 3. – С. 42–47.
7. **Калинина, И. С.** О действии оператора FE-замыкания на множестве функций счетнозначной логики / И. С. Калинина // Вестник Московского университета. Сер. 15. Вычислит. матем. и кибернет. – 2014. – № 3. – С. 46–51.
8. **Rogers, H.** Theory of recursive functions and effective computability / H. Rogers. – Mc Graw-Hill, New York, 1967.
9. **Яблонский, С. В.** Введение в дискретную математику / С. В. Яблонский. – М. : Наука, 1986.
10. **Марченков, С. С.** Определимость в языке функциональных уравнений счетнозначной логики / С. С. Марченков // Дискретная математика. – 2013. – № 4. – С. 13–23.
11. **Марченков, С. С.** Однородные алгебры / С. С. Марченков // Проблемы кибернетики. – Вып. 39. – М. : Наука, 1982. – С. 85–106.

References

1. Herbrand J. *Sur Compt. rend. Soc. Sci. Lettr. Vars. Classe III.* 1931, vol. 24, pp. 12–56.
 2. Herbrand J. *J. reine und angew. Math.* 1931, vol. 166, pp. 1–6.
 3. Godel K. *Monatsh. Math. und Phys.* 1931, vol. 38, pp. 173–198.
 4. Marchenkov S. S. *Diskretnyy analiz i issledovanie operatsi* [Discrete analysis and research of operations]. 2010, no. 4, pp. 18–31.
 5. Marchenkov S. S. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychisl. matem. i kibernet.* [Bulletin of Moscow University. Series 15. Calculus mathematics and cybernetics]. 2011, no. 2, pp. 32–39.
 6. Marchenkov S. S., Kalinina I. S. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislit. matem. i kibernet.* [Bulletin of Moscow University. Series 15. Calculus mathematics and cybernetics]. 2013, no. 3, pp. 42–47.
 7. Kalinina I. S. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 15. Vychislit. matem. i kibernet.* [Bulletin of Moscow University. Series 15. Calculus mathematics and cybernetics]. 2014, no. 3, pp. 46–51.
 8. Rogers H. *Theory of recursive functions and effective computability.* Mc Graw-Hill, New York, 1967.
 9. Yablonskiy S. V. *Vvedenie v diskretnuyu matematiku* [Introduction into discrete mathematics]. Moscow: Nauka, 1986.
 10. Marchenkov S. S. *Diskretnaya matematika* [Discrete mathematics]. 2013, no. 4, pp. 13–23.
 11. Marchenkov S. S. *Problemy kibernetiki* [Problems of cybernetics]. Issue 39. Moscow: Nauka, 1982, pp. 85–106.
-

Калинина Инна Сергеевна

аспирант, Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
(Россия, г. Москва, Ленинские горы, 1)

E-mail: isenilova@gmail.com

Kalinina Inna Sergeevna

Postgraduate student, Moscow State
University named after M.V. Lomonosov
(1 Leninskie gory street, Moscow, Russia)

УДК 519.716

Калинина, И. С.

О некоторых свойствах оператора Fe-замыкания в счетнозначной логике / И. С. Калинина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 4 (32). – С. 37–46.